

Mécanique classique | Chapitre 1 | Correction TD (M1)

Exercice n°1 • Projection de vecteurs

cours

1) On a :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= mg (-\cos(\alpha) \vec{e}_{y'} + \sin(\alpha) \vec{e}_{x'}) \\ \vec{N} &= N (\cos(\alpha) \vec{e}_y + \sin(\alpha) \vec{e}_x) \\ \vec{f} &= f (-\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y)\end{aligned}$$

2) On a :

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \cos(\alpha) \vec{e}_{x'} + \sin(\alpha) \vec{e}_{y'} \\ \vec{e}_y &= \cos(\alpha) \vec{e}_{y'} - \sin(\alpha) \vec{e}_{x'} \\ \vec{e}_{x'} &= \cos(\alpha) \vec{e}_x - \sin(\alpha) \vec{e}_y \\ \vec{e}_{y'} &= \cos(\alpha) \vec{e}_y + \sin(\alpha) \vec{e}_x\end{aligned}$$

3) On a :

$$\begin{aligned}\vec{P} &= mg (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta) \\ \vec{T} &= T (-\cos(\theta) \vec{e}_y - \sin(\theta) \vec{e}_x)\end{aligned}$$

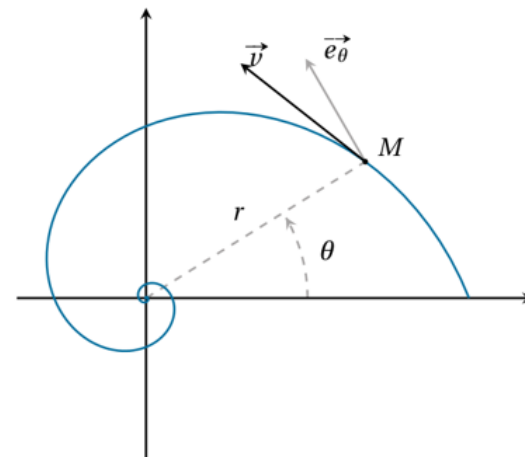
4) On a :

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \cos(\theta) \vec{e}_\theta + \sin(\theta) \vec{e}_r \\ \vec{e}_y &= \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_r &= \cos(\theta) \vec{e}_y + \sin(\theta) \vec{e}_x \\ \vec{e}_\theta &= \cos(\theta) \vec{e}_x - \sin(\theta) \vec{e}_y\end{aligned}$$

Exercice n°2 • Trajectoire spiralaire

cours

1)



2) On a :

$$v_r(t) = \dot{r} = -\frac{b}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$v_\theta(t) = r\dot{\theta} = b\omega e^{-t/\tau}$$

Et :

$$a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = b \left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2 \right) e^{-t/\tau}$$

$$a_\theta(t) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\frac{2b\omega}{\tau} e^{-t/\tau}$$

3) On a :

$$v(t) = \sqrt{v_r^2(t) + v_\theta^2(t)} = b \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} e^{-t/\tau}$$

$$a(t) = \sqrt{a_r^2(t) + a_\theta^2(t)} = b \left(\frac{1}{\tau^2} + \omega^2 \right) e^{-t/\tau}$$

En notant α l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse :

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{v}}{r \cdot v} = \frac{r \cdot v_r}{r \cdot v} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

On remarque en particulier qu'il ne dépend pas du point M.

4) Déterminons $r(\theta)$:

$$r(\theta) = r = b e^{-\theta/\omega\tau}$$

Ainsi,

$$\Delta r(t) = r(\theta) - r(\theta + 2\pi) = b \left(1 - e^{-2\pi/\omega\tau} \right) e^{-t/\tau}$$

Exercice n°3 • Bretelle d'accès

cours

1) La voiture suit une trajectoire circulaire uniforme. Ainsi, la norme du vecteur accélération vaut :

$$a_0 = \frac{v_0^2}{R} = 15,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} > a_m$$

La voiture dérape.

2) Avec le même raisonnement :

$$a_m = \frac{v_1^2}{R} \Rightarrow v_1 = 22,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 80,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

3) On rappelle qu'en coordonnées polaires, sur une trajectoire circulaire :

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{u}_r \quad \vec{v} = R\omega \vec{u}_\theta \quad \vec{a} = R\dot{\omega} \vec{u}_\theta - R\omega^2 \vec{u}_r = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - \frac{v^2(t)}{R} \vec{u}_r$$

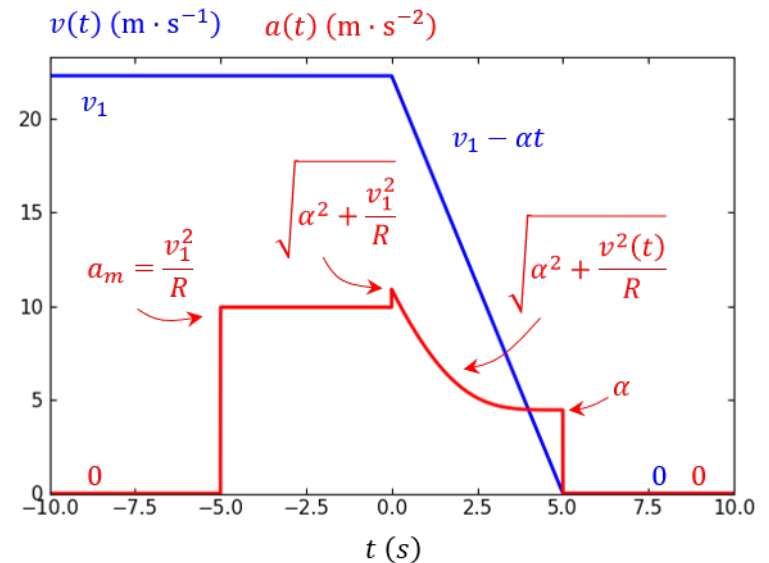
De plus, la norme de la vitesse décroît linéairement dans le temps. Donc :

$$v(t) = R\omega(t) = v_1 - \alpha t \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\alpha$$

avec α un coefficient positif. On en déduit :

$$a(t) = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{v^2(t)}{R} \right)^2}$$

Courbes :



En $t = 0^+$ la voiture commence à freiner et cela se traduit par une augmentation brusque de l'accélération. Plus le freinage est puissant (α grand), plus l'augmentation de l'accélération est importante. Dans cet exemple, la voiture sort de piste au moment où elle freine. C'est pour cela qu'il fut toujours freiner avant le virage, pas pendant...

Exercice n°4 • Conversion d'unité

☆☆☆

1) On a :

$$v = 70 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 70 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 19,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2) On a :

$$\omega = 3600 \text{ tours} \cdot \text{min}^{-1} = 3600 \frac{\text{tours}}{\text{min}} = 3600 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = 377 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Exercice n°5 • Mouvements d'un planeur

☆☆☆

1) On rappelle que l'évolution de la norme du vecteur vitesse est liée à la composante tangentielle du vecteur accélération. Comme dans le cours, notons $\vec{T}$ le vecteur

unitaire tangent à la trajectoire en P et $\vec{N}$ le vecteur unitaire normal à la trajectoire en P, dirigé dans le sens de la concavité (« vers l'intérieur » de la trajectoire). Alors :

$$\frac{dv}{dt} = \vec{a} \cdot \vec{T}$$

Dans la position (1) :

$$\vec{a} \cdot \vec{T} < 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} < 0 \Rightarrow \text{La norme du vecteur vitesse diminue}$$

Dans la position (2) :

$$\vec{a} \cdot \vec{T} > 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} > 0 \Rightarrow \text{La norme du vecteur vitesse augmente}$$

Dans la position (3) :

$$\vec{a} \cdot \vec{T} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \text{La norme du vecteur vitesse est constante}$$

2) Voir cours, on a : $a = \frac{v^2}{R}$

Exercice n°6 • Équations horaires



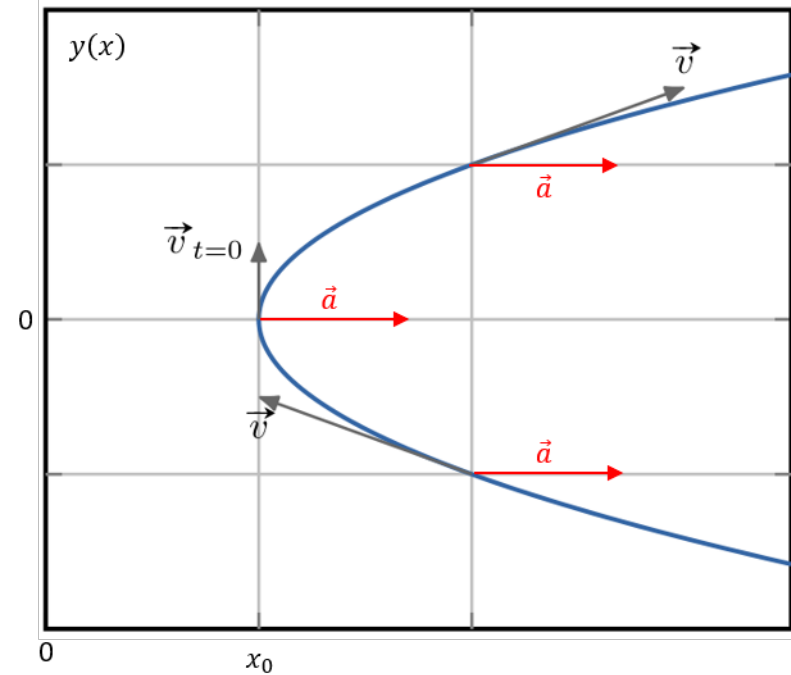
1) On obtient :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2a_0 t & \dot{y} &= v_0 & \dot{z} &= 0 & v &= \sqrt{(2a_0 t)^2 + v_0^2} \\ \ddot{x} &= 2a_0 & \ddot{y} &= 0 & \ddot{z} &= 0 & a &= 2a_0 \end{aligned}$$

2) et 3) On a :

$$t = \frac{y}{v_0} \Rightarrow x(y) = \frac{a_0}{v_0^2} y^2 + x_0$$

La courbe $x(y)$ est donc une parabole qui passe par x_0 lorsque $y = 0$. Ainsi :



Exercice n°7 • Trajectoire hélicoïdale



1) On a :

$$\begin{aligned} [R] &= [x] = \text{Longueur} \\ [\omega t] &= 1 \Rightarrow [\omega] = \text{Temps}^{-1} \\ [\alpha] &= \left[\frac{z}{t} \right] = \text{Longueur} \cdot \text{Temps}^{-1} = \text{Vitesse} \end{aligned}$$

2) On rappelle le lien entre les coordonnées de la base cartésienne et de la base cylindrique :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2} = R \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x} = \tan(\omega t)$$

Ainsi :

$$\boxed{r(t) = R} \quad \boxed{\theta(t) = \omega t} \quad \boxed{z(t) = \alpha t}$$

3) Le point se déplace à la surface d'un cylindre (car r est constant). L'angle et l'altitude croissent tous deux linéairement avec le temps. Cette courbe s'appelle une hélice.

4) En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{v} = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z = R\omega (\cos(\omega t) \vec{u}_y - \sin(\omega t) \vec{u}_x) + \alpha \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques, on rappelle que l'on a :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z = R\omega \vec{u}_\theta + \alpha \vec{u}_z$$

Sa norme vaut :

$$v = \sqrt{(R\omega)^2 + \alpha^2}$$

Exercice n°8 • Trajectoire d'un avion



1) Pour un mouvement du nord vers le sud, l'angle φ reste constant. Il décrit un cercle de rayon R_T à la vitesse v uniforme. Ainsi,

$$v = R\dot{\theta} \Rightarrow \theta(t) = \frac{v}{R_T}t$$

2) C'est désormais l'angle θ qui est constant et φ qui varie. Par ailleurs, le cercle décrit a pour rayon $R_T \sin(\theta)$. Enfin, $\dot{\varphi} < 0$ car il se déplace vers l'ouest. Ainsi,

$$v = -R_T \sin(\theta) \dot{\varphi} \Rightarrow \varphi(t) = -\frac{v}{R_T \sin(\theta)}t$$

Exercice n°9 • Cycloïde

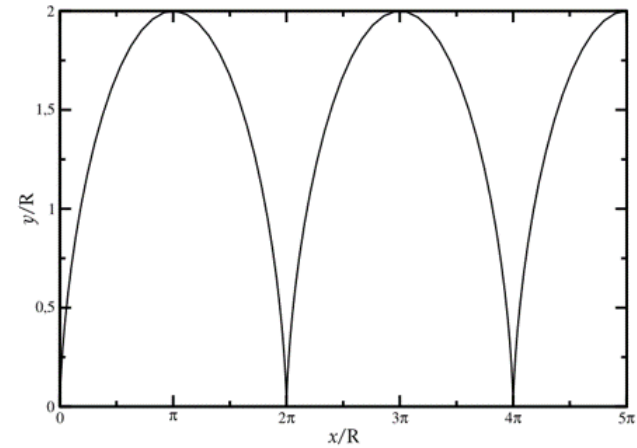


1) Puisque la roue ne glisse pas, la distance parcourue par le point C est égale à la distance de l'arc de cercle allant de $M(t=0)$ à $M(t)$. C'est à dire (par définition même de l'unité radian) : $x_c = R\theta$

2) On a :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OC} + \vec{CA} = x_c \vec{u}_x + R \vec{u}_y + R(-\cos(\theta) \vec{u}_y - \sin(\theta) \vec{u}_x) \\ &= R[(\theta - \sin(\theta)) \vec{u}_x + (1 - \cos(\theta)) \vec{u}_y] \end{aligned}$$

3)



4) On a :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot{\theta} [(1 - \cos(\theta)) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y]$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R(\ddot{\theta}(1 - \cos(\theta)) + \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \vec{u}_x + R(\ddot{\theta} \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \vec{u}_y$$

Lorsque M touche le sol, $\theta = 0 \bmod 2\pi$. Ainsi,

$$\vec{v}_{sol} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{sol} = R\dot{\theta}^2 \vec{u}_y = \frac{v_c^2}{R} \vec{u}_y$$

Exercice n°10 • Cardioïde



1) On sait que :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r = \frac{a}{2} (1 + \cos(\theta)) \vec{u}_r$$

De plus,

$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

Ainsi, avec $\theta = \omega t$, on a :

$$x(t) = \frac{a}{2} (1 + \cos(\omega t)) \cos(\omega t)$$

$$y(t) = \frac{a}{2} (1 + \cos(\omega t)) \sin(\omega t)$$

2) Dans la base polaire :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} -\frac{a\omega}{2}\sin(\omega t) \\ \frac{a\omega}{2}[1 + \cos(\omega t)] \end{pmatrix}$$

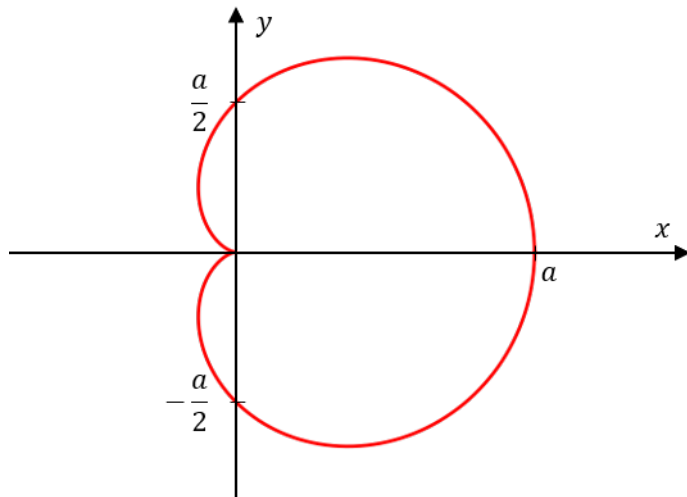
Dans la base cartésienne :

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y = \begin{pmatrix} -\frac{a\omega}{2} [1 + 2\cos(\omega t)] \sin(\omega t) \\ \frac{a\omega}{2} [\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t) + \cos(\omega t)] \end{pmatrix}$$

3) On se sert de l'expression de la base polaire (expression plus simple) :

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \frac{a\omega}{2} \sqrt{\sin^2(\omega t) + [1 + \cos(\omega t)]^2} = \boxed{a\omega \sqrt{\frac{1 + \cos(\omega t)}{2}}}$$

4) Trajectoire :



Exercice n°11 • Conjonction de planètes

☆☆☆

1) La vitesse angulaire sur chaque mouvement est $\omega = 2\pi/T$. La différence angulaire $\Delta\theta$ entre les directions des deux planètes varie donc avec le temps t comme:

$$\Delta\theta = 2\pi \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) t$$

Les planètes sont en conjonction quand $\Delta\theta = 2\pi \bmod 2\pi$. En choisissant une conjonction comme origine des temps, la suivante se produit pour T_{conj} tel que :

$$2\pi = 2\pi \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) T_{conj} \Rightarrow T_{conj} = \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right)^{-1}$$

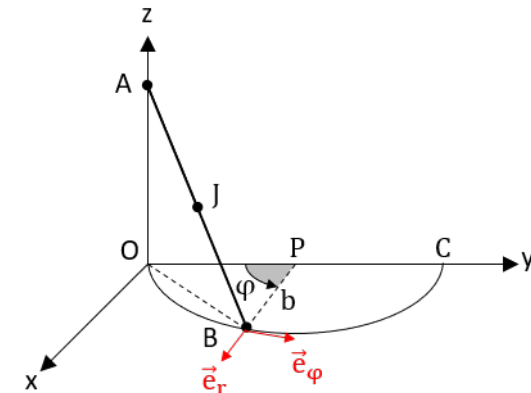
2) On calcule :

$T_{conj} = 587 \text{ jours}$

Exercice n°12 • Chute guidée d'un bâton

☆☆☆

1) La base polaire décrite dans l'énoncé est la suivante :



2) On a :

$$\vec{e}_r = -\cos(\varphi) \vec{e}_y + \sin(\varphi) \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_\varphi = \cos(\varphi) \vec{e}_x + \sin(\varphi) \vec{e}_y$$

3) La vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \omega t$$

Car ω est une constante. La chute se termine lorsque $\varphi = \pi$. Ainsi,

$$T = \frac{\pi}{\omega}$$

4) Vecteur position :

$$\overrightarrow{PB} = b \vec{e}_r$$

On dérive ce vecteur pour obtenir la vitesse.

$$\vec{v}_B = \frac{d\overrightarrow{PB}}{dt} = b\omega \vec{e}_\varphi$$

On dérive ce vecteur pour obtenir l'accélération.

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt} = -b\omega^2 \vec{e}_r$$

5) On sait que :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} = b \vec{e}_y + b \vec{e}_r = b [\sin(\omega t) \vec{e}_x + (1 - \cos(\omega t)) \vec{e}_y]$$

Ainsi,

$$x_B(t) = b \sin(\omega t)$$

$$y_B(t) = b(1 - \cos(\omega t))$$

6) Le point J étant à mi-distance entre A et B , on a :

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_J(t) = \frac{x_A(t) + x_B(t)}{2} = \frac{b}{2} \sin(\omega t) \\ y_J(t) = \frac{y_A(t) + y_B(t)}{2} = \frac{b}{2} (1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

Avant de déterminer la distance $z_J(t)$, déterminons dans un premier temps $z_A(t)$ à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} z_A(t) &= \sqrt{(2b)^2 + OB^2} \Rightarrow z_J(t) = \frac{z_A(t)}{2} = b \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\ &= \sqrt{(2b)^2 + x_b^2 + y_B^2} \\ &= b \sqrt{4 + 2(1 - \cos(\omega t))} \\ &= b \sqrt{4 + 4\sin^2(\omega t/2)} \\ &= 2b \sqrt{\cos^2(\omega t/2)} \\ &= 2b \cos(\omega t/2) \end{aligned}$$

7) On calcule le vecteur vitesse dans la base cartésienne :

$$\vec{v}_J = \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{b\omega}{2} \cos(\omega t) \\ \frac{b\omega}{2} \sin(\omega t) \\ \frac{b\omega}{2} \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

On en déduit la norme au carré du vecteur :

$$v_J^2(t) = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right) = \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left(1 + \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$$

8) On constate que $v_J^2(t)$, donc $v_J(t)$, augmente au cours du temps. Il s'agit donc d'un mouvement accéléré.

9) Par définition :

$$\begin{aligned} \langle v_J^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T v_J^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \int_0^T \left(1 + \frac{1 - \cos(\omega t)}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \int_0^T \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(\omega t)\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \left[\frac{3t}{2} - \frac{1}{2\omega} \sin(\omega t)\right]_0^T \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{b\omega}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Exercice n°13 • Trajectoire de poursuite



1) Le chien C , situé à l'instant t en (x, y) se dirige toujours vers son maître M situé, au même instant en $(0, vt)$. Un vecteur vecteur tangent au vecteur vitesse du chien, c'est-à-dire tangent à la trajectoire du chien, est donc par exemple le vecteur $\overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = vt \vec{u}_y - (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y) = -x \vec{u}_x + (vt - y) \vec{u}_y$$

2) Le vecteur vitesse du chien est de norme $2v$. Ainsi,

$$\vec{v}_C = \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} = 2v \vec{u}_{CM}$$

Avec :

$$\overrightarrow{OC} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y \Rightarrow \vec{v}_C = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y$$

D'où la norme du vecteur vitesse :

$$v_C = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \boxed{\left|\frac{dx}{dt}\right| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2v}$$

Et

$$\vec{u}_{CM} = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM} = \frac{-x \vec{u}_x + (vt - y) \vec{u}_y}{\sqrt{x^2 + (vt - y)^2}}$$

On a donc :

$$\begin{cases} (1) \quad \cdot \vec{u}_x \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2v \frac{-x}{\sqrt{x^2 + (vt - y)^2}} \\ (2) \quad \cdot \vec{u}_y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2v \frac{vt - y}{\sqrt{x^2 + (vt - y)^2}} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} (2) / (1) &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{vt - y}{x} \\ &\Rightarrow -x \frac{dy}{dx} = vt - y \\ \cdot \frac{d}{dt} &\Rightarrow -\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dx} - x \frac{d^2y}{dx dt} = v - \frac{dy}{dt} \\ \cdot \frac{dx}{dx} &\Rightarrow -\frac{dx}{dt} \frac{dy}{dx} - x \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dx^2} = v - \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dx} \\ &\Rightarrow \boxed{-x \frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dx^2} = v} \end{aligned}$$

On prend le carré des deux équations encadrées et on les combine pour faire disparaître dx/dt . On obtient alors l'expression demandée :

$$\boxed{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}$$

3) On a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{2} x^{1/2} - \frac{x^{-1/2}}{2\alpha} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\alpha}{4} x^{-1/2} + \frac{x^{-3/2}}{4\alpha}$$

On injecte la solution dans l'équation différentielle. On a bien :

$$4x^2 \left(\frac{\alpha}{4} x^{-1/2} + \frac{x^{-3/2}}{4\alpha} \right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2} x^{1/2} + \frac{x^{-1/2}}{2\alpha} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha}{2} x^{1/2} - \frac{x^{-1/2}}{2\alpha} \right)^2$$

Les coefficients α et β sont donnés par les conditions initiales.

$$\begin{cases} x(0) = a \\ y(0) = 0 \\ \frac{dy}{dx}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{a}} \\ \beta &= \frac{2a}{3} \end{aligned}}$$

4) Le chien rejoint sa maîtresse lorsque $x = 0$. Cela se produit en $y = \beta = \frac{2a}{3}$. Pour rejoindre ce point, la maîtresse (et donc le chien) a mis un temps :

$$\boxed{T = \frac{2a}{3v}}$$

5) Le chien court à $2v$, il a donc parcouru une distance $\boxed{D = 2vT = \frac{4}{3a}}$ avant qu'ils se rejoignent.